

DOI:10.7652/xjtuxb201408018

一类分数阶电力电容器动力学建模与数值分析

刘凌¹, 庞霞¹, 刘崇新¹, 李锐海²

(1. 西安交通大学电气工程学院, 710049, 西安; 2. 特高压工程技术(昆明、广州)国家工程实验室, 510080, 广州)

摘要: 针对整数阶电力电容器绝缘设计中电场分布不均匀的问题,提出了一种分数阶电场优化模型。该模型基于分数阶微积分算子理论,设计了含 10 kV 并联电力电容器的分数阶链型等效分抗电路拓扑结构,进而采用 ABM(Adams-Bashford-Moulton)预估校正算法对模型进行了频域转换。当分数阶阶次取 0.1~0.9 且最大误差分别为 2 dB 和 3 dB 时,通过数值模拟得到等效电路中电容内部各等效点的电位值。仿真结果表明,当确定了波特图的最大误差时,随着分数阶阶次的增加,电容内部的电场分布趋于均匀,各点电压的相位值在同一时间逐渐增大,并展现出良好的空间关联性。

关键词: 电力电容器;分维特性;电场计算;动力学模型

中图分类号: TM461 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2014)08-0104-06

Dynamical Modeling and Numerical Analysis for Fractional-Order Power Capacitor System

LIU Ling¹, PANG Xia¹, LIU Chongxin¹, LI Ruihai²

(1. School of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. National Engineering Laboratory for Ultra High Voltage Engineering Technology (Kunming, Guangzhou), Guangzhou 510080, China)

Abstract: An optimized fractional-order electric field model is proposed to deal with non-uniform electric field distribution in integer-order form of power capacitor design. Following fractional derivative theory, the model for chain type fractional-order circuit topology containing a 10 kV parallel power capacitor is established. Then the frequency domain conversion is performed by Adams-Bashford-Moulton (ABM) predictor-corrector algorithm, the model is simplified and the potential distribution characteristics of fractional-order power capacitor is analyzed by adjusting the parameters. The potential internal capacitance in fractional equivalent circuit can be obtained by taking the fractional order within 0.1-0.9 and the maximum error as 2 dB and 3 dB respectively. The simulation result demonstrates that the electric field inside the capacitor tends to distribute uniformly and the voltage phase value at each point gradually increases as the maximum Bode plot error is determined and the fractional order is heightened.

Keywords: power capacitor; fractal dimension; electric field measurement; dynamical models

并联电力电容器是目前用量最大的电力电容器,通常并联在交流系统中,主要补偿感性无功功率,改善功率因数,减少电能损耗,增强系统稳定性,提高系统输送电能的能力。以电场分析为基础的绝缘设计是高压电力电容器现代设计及研究的热点问题。电场的数值计算对于电力电容器优化内部结构,改善电容器绝缘特性有着重要意义^[1-4]。传统电容器的建模与分析是基于整数阶微分理

论的,整数阶微积分具有明确的几何和物理意义,电容电流在电容参数值一定时,与电容电压随时间的变化率成比例。但是近年来,随着非线性理论及分形微分几何理论的发展,人们认识到基于整数阶微积分算子的传统电容物理描述只不过是模型的理想化处理,而该类模型忽视了电容物理特性的微观行为及历史关联度^[5-9]。

实际上电容在物理特性上均呈现分数阶特性,因此需建立相应的分数阶数学模型对其动力学特性、电位分布的自相似分维性进行分析与研究^[10]。以往研究指出,整数阶即理想化电容在实际中并不存在,这主要是由于构成电容的电解质材料展示出分数维特性,也就是空间不平滑动态特性。文献[11]通过实验测定出在不同电解质情况下分数阶电容的阶数,并根据居里经验定律建立了最简单的分数阶电容模型。与此同时,文献[12-14]通过选择具有不同分形结构的电极表面面积、不同电解液,研制出了具有 0.59 阶、0.42 阶等阶次的分数阶电容。

本文基于电力电容器(型号为 BFMH11/3^{1/2}-600)的整数阶数学模型,通过分数阶微分算子提出了具有分数阶结构的电力电容器拟合动力学模型。在 q 阶微积分传递函数的基础上,建立了含有无限维链型分抗等效电路的电容电路模型。数值仿真结果表明,当给定波特图的最大误差时,随着电容的分数阶阶次的增加,电容内部各点的电位分布将趋于均匀。

1 分数阶微积分算子理论

统一的微积分算子包括分数阶和整数阶,可用算子式表示,即

$${}_aD_t^\lambda f(t) = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q}f(t), & R(q) > 0 \\ f(t), & R(q) = 0 \\ \int_a^t f(\tau)(d\tau)^{-q}, & R(q) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: a, t 为运算的上、下限; q 为微积分算子的阶次,其值可以为任意复数。如果 $q > 0$,则 ${}_aD_t^q$ 表示分数阶微分, ${}_aD_t^{-q}$ 表示分数阶积分。当 $q = n \in N$ 时,有 ${}_aD_t^{-q}f(t) = f^n(t)$,即通常意义下的函数 $f(t)$ 的 n 次导数。

时-频域转换法是分数阶模型计算与分析的主要方法,应用拉普拉斯变换将动力学模型分数阶的微积分方程变换到复频域中,然后通过整数阶算子拟合分数阶算子完成数值计算。本文考虑 ABM

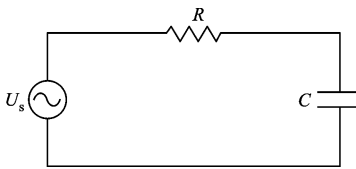
(Adams-Bashford-Moulton)预估校正算法,令函数的初始值为 0,分数阶算子可以用频域中的传递函数 $H(s) = H(0)/s^q$ 代替,其中取 $s = j\omega$ 为复频率, q 为正的分数值,由此得到

$$H(s) \approx \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(kd)^i k p_0}\right) / \prod_{i=0}^N \left(\frac{s}{(kd)^i p_0} + 1\right) \quad (2)$$

式中: $1/p_0$ 称为分数阶动力学系统的松弛时间常数。通过式(2)可将求解分数阶函数表达式转化为求解系统零极点的问题。假设在工程实际中要求动力学系统变量的计算误差不超过 y dB(y 为正值),则 $kd = 10^{[y/10(1-q)]}$ 。采用这种近似方法可以求得 q 阶微积分传递函数的各个零极点,得到模型的传递函数。

2 分数阶电力电容器动力学建模

电力电容器一般并联在变电站的低压母线上,用于无功补偿。本文将母线与电容器连接处之间的损耗等效为一个电阻,并将电力电容器接地,建立一个含电力电容器的简单的单相电路,见图 1。模型采用的电力电容器型号为 BFMH11/3^{1/2}-600,可得电容表达式为

$$C = \frac{Q}{\omega U^2} \quad (3)$$


U_s 为变电站的母线电压; R 为等效电阻; C 为电容器的电容
图 1 含电力电容器的简化电路模型

并联电力电容器一般给出的参量是其补偿的无功量 Q 和额定电压 U ,因此可以通过 $Q = \omega C U^2$ 得出电容 $C = Q/\omega U^2$ 。对于电路图 1,根据电流电压定律可得整数阶微分方程

$$C \frac{du_C}{dt} = \frac{u_s - u}{R} \quad (4)$$

即

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{u_s - u}{RC} \quad (5)$$

式(5)的分数阶微分表达式为

$$\frac{d^q u_C}{dt^q} = \frac{u_s - u}{RC}, \quad q \in (0, 1) \quad (6)$$

将式(6)变换到拉普拉斯复频域中,用整数阶算子来近似分数阶算子。若系统的初始值为 0,则有

$$L\{ {}_0 D_t^q x(t) \} = s^q X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s_0^k D_t^{q-k-1} x(t) \big|_{t=0} \quad (7)$$

分数阶阶次 q 由时频域转换中的转移函数 $H(s) = H(0)/s^q$ 代替。

当取波特图近似最大误差为 2 dB, 且 $q=0.9$ 时, 对式(6)进行拉普拉斯变换, 可得

$$s^q U(s) = \frac{U_s(s) - U(s)}{RC} \quad (8)$$

式中: $U(s) = L[u(t)]$; $U_s(s) = L[u_s(t)]$ 。

根据 Wolf 定理, 有

$$\frac{1}{s^q} = \frac{g(s^2 + ks + l)}{s^3 + ms^2 + ns + p} \quad (9)$$

式中: $g=2.267\ 5$; $k=216.692$; $l=278.296\ 8$; $m=361.567$; $n=778.819$; $p=10$ 。对比式(8)和式(9), 可得

$$U(s) = \frac{g(s^2 + ks + l)}{s^3 + ms^2 + ns + p} \left[\frac{U_s(s) - U(s)}{RC} \right] \quad (10)$$

令 $u_1 = u_s$, $u_2 = \dot{u}_s$, $u_3 = \ddot{u}_s$, 可将式(6)拟合为一个 3 阶的整数阶微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2 \\ \frac{du_2}{dt} &= u_3 \\ \frac{du_3}{dt} &= \frac{g}{RC} [\dot{u}_s + k\ddot{u}_s + lu_s] - \left(\frac{g}{RC} + m \right) u_3 - \left(\frac{gk}{RC} + n \right) u_2 - \left(\frac{gl}{RC} + p \right) u_1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

设计无限维链型分抗电路拟合分数阶电容, 图 2 所示的电路近似拟合了式(9)。

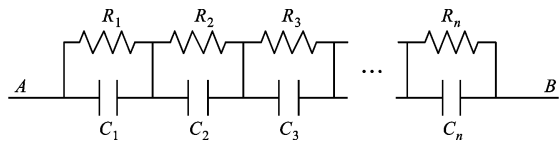


图2 分数阶电容的链型等效分抗电路

图中 AB 间等效电路的复频域表达式为

$$H(s) = \frac{1/C_1}{s+1/R_1C_1} + \frac{1/C_2}{s+1/R_2C_2} + \dots + \frac{1/C_n}{s+1/R_nC_n} \quad (12)$$

对于 3 阶微分方程, 取 $q=0.9$, $n=3$, $1/s^q$ 波特图在近似最大误差为 2 dB 时的电容等效电路见图 3。

图 3 的传递函数为

$$H(s) = \frac{1/C_1}{s+1/R_1C_1} + \frac{1/C_2}{s+1/R_2C_2} + \frac{1/C_3}{s+1/R_3C_3} = \frac{\beta[s^2 + as + \theta/\omega]}{C_0\lambda} \quad (13)$$

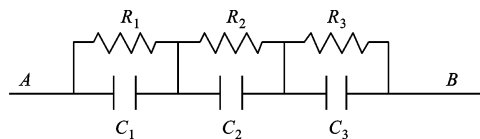


图3 链型分抗 3 阶等效电路

式中

$$\beta = (C_0/C_1 + C_0/C_2 + C_0/C_3)$$

$$\alpha = [(C_2 + C_3)/R_1 + (C_1 + C_3)/R_2 + (C_1 + C_2)/R_3]$$

$$\omega = C_1C_2 + C_2C_3 + C_1C_3; \quad \theta = \frac{(R_1 + R_2 + R_3)}{R_1R_2R_3}$$

$$\lambda = (s+1/R_1C_1)(s+1/R_2C_2)(s+1/R_3C_3)$$

令参考电容 $C_0=1\ \mu\text{F}$, $H(s)=F(s)/C_0$, 又由于 $F(s)=1/s^q$, 与式(9)对比, 可得参数 $R_1=62.84\ \text{M}\Omega$, $R_2=250\ \text{k}\Omega$, $R_3=2.5\ \text{k}\Omega$, $C_1=1.232\ \mu\text{F}$, $C_2=1.835\ \mu\text{F}$, $C_3=1.1\ \mu\text{F}$ 。

参考电容 $C_0 \neq 1\ \mu\text{F}$, 而取随机值, 例如当 $C_0=47.35\ \mu\text{F}$ 时, 为保证 $F(s)$ 中的系数不变, 将电容值 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 均乘以电容 C_0 的值, 而电阻值 $R_1, R_2, \dots, R_n$ 均除以电容 C_0 的值, 分别可得到波特图误差为 2 dB、3 dB 时拟合电路中各个电阻和电容的值。由以上的推导过程可进行分数阶电容的数值仿真拟合计算, 通过计算与分析将得出等效电路中电位分布的特征。

3 仿真分析

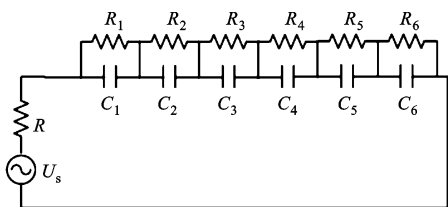
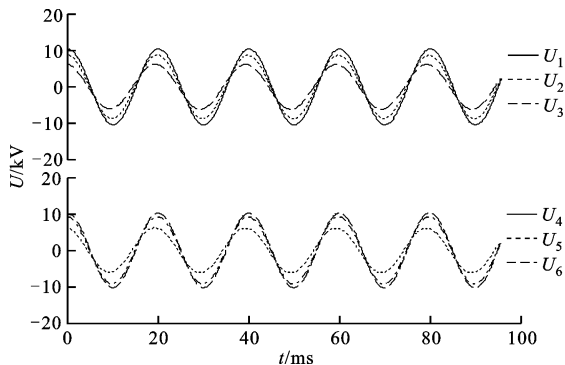
在仿真分析中, 电容器选择为配电系统中安装在 10 kV 母线侧用于补偿无功功率的并联电力电容器, 其型号为 BFMH11/3^{1/2}-600, 该电容器的额定运行电压为 $U=11/3^{1/2}\ \text{kV}$, 最大补偿容量为 $Q=600\ \text{kV} \cdot \text{A}$, 则可得电容为

$$C_0 = \frac{Q}{\omega U^2} = \frac{600\ 000}{100\pi \times (11/3^{1/2})^2} = 47.35\ (\mu\text{F})$$

当 $q=0.6, 1/s^q$ 波特图近似的最大误差为 2 dB 时, 系统链型等效电路如图 4 所示, 分数阶电容的链型电路传递函数为

$$F(s) = \frac{g(s^5 + as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e)}{s^6 + ms^5 + ns^4 + ps^3 + ks^2 + ls + h} \quad (14)$$

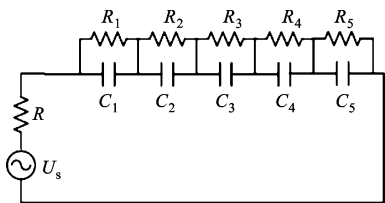
由链型电路以及传递函数解得 R, C , 为保证式(14)中 $F(s)$ 的各系数不变, 将 $R_1=12.33\ \text{M}\Omega$, $R_2=2.448\ \text{M}\Omega$, $R_3=0.738\ \text{M}\Omega$, $R_4=0.233\ \text{M}\Omega$, $R_5=0.075\ 4\ \text{M}\Omega$, $R_6=0.03\ \text{M}\Omega$ 的值均除以 C_0 , 而 $C_1=5.527\ \mu\text{F}$, $C_2=4.085\ \mu\text{F}$, $C_3=1.99\ \mu\text{F}$, $C_4=0.926\ \mu\text{F}$, $C_5=0.420\ \mu\text{F}$, $C_6=0.156\ \mu\text{F}$ 的值均乘以 C_0 。仿真可求得各个点的电压, 如图 5 所示。

图4 误差为 2 dB、 $q=0.6$ 时的等效电路图5 误差为 2 dB、 $q=0.6$ 时电路各点电位

当波特图近似的最大误差为 3 dB 时,其链型等值电路如图 6 所示,传递函数为

$$F(s) = \frac{g(s^4 + as^3 + bs^2 + cs + d)}{s^5 + ms^4 + ns^3 + ps^2 + ks + l} \quad (15)$$

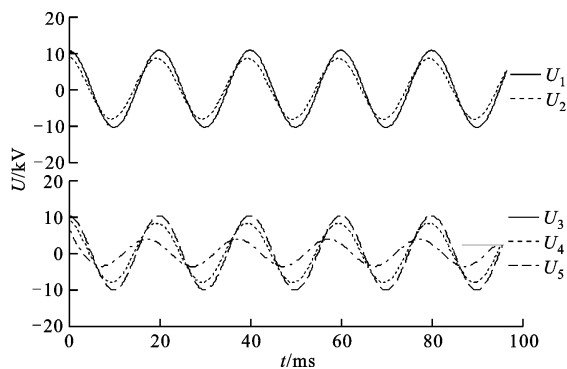
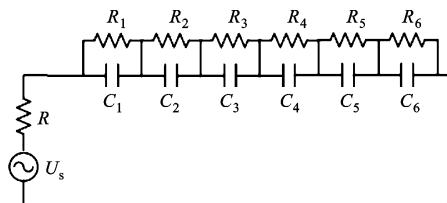
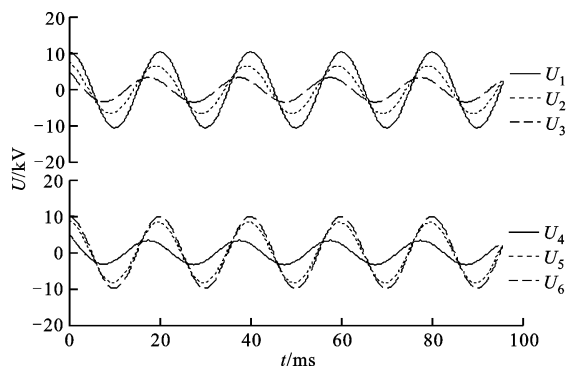
此时,由链型电路以及传递函数解得 R 、 C 。为保证 $F(s)$ 的各系数不变,将 $R_1 = 13.71 \text{ M}\Omega$ 、 $R_2 = 1.766 \text{ M}\Omega$ 、 $R_3 = 0.31 \text{ M}\Omega$ 、 $R_4 = 0.055 \text{ M}\Omega$ 、 $R_5 = 0.011 \text{ M}\Omega$ 的值均除以 C_0 ,而 $C_1 = 4.102 \text{ }\mu\text{F}$ 、 $C_2 = 1.791 \text{ }\mu\text{F}$ 、 $C_3 = 0.5737 \text{ }\mu\text{F}$ 、 $C_4 = 0.1818 \text{ }\mu\text{F}$ 、 $C_5 = 0.05113 \text{ }\mu\text{F}$ 的值均乘以 C_0 。仿真可求得各个点的电压,如图 7 所示。

图6 误差为 3 dB、 $q=0.6$ 时的等效电路

当 $q=0.7$ 、波特图近似的最大误差取 2 dB 时,链型等值电路如图 8 所示,传递函数为

$$F(s) = \frac{g(s^5 + as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e)}{s^6 + ms^5 + ns^4 + ps^3 + ks^2 + ls + h} \quad (16)$$

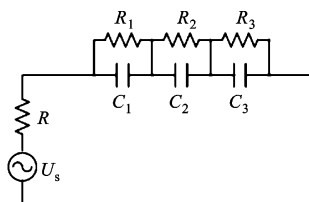
当 C_0 确定时,由链型电路以及传递函数解得 R 、 C ,为保证 $F(s)$ 的各系数不变,将 $R_1 = 35.62 \text{ M}\Omega$ 、 $R_2 = 0.33 \text{ M}\Omega$ 、 $R_3 = 0.0064 \text{ M}\Omega$ 的值均除以 C_0 ,而 $C_1 = 1.329 \text{ }\mu\text{F}$ 、 $C_2 = 0.69 \text{ }\mu\text{F}$ 、 $C_3 = 1.35 \text{ }\mu\text{F}$ 的值均乘以 C_0 。仿真可求得各个点的电压,如图 9 所示。

图7 误差为 3 dB、 $q=0.6$ 时电路各点电位图8 误差为 2 dB、 $q=0.7$ 时的等效电路图9 误差为 2 dB、 $q=0.7$ 时电路各点电位

当 $q=0.9$ 、 $1/s^q$ 波特图近似的最大误差取 2 dB 时,其链型等值电路如图 10 所示,传递函数为

$$F(s) = \frac{g(s^2 + ks + l)}{s^3 + ms^2 + ns + p} \quad (17)$$

当 C_0 确定时,由链型电路以及传递函数解得 R 、 C ,为保证 $F(s)$ 的各系数不变,将 $R_1 = 62.84 \text{ M}\Omega$ 、 $R_2 = 0.25 \text{ M}\Omega$ 、 $R_3 = 0.0025 \text{ M}\Omega$ 的值均除以 C_0 ,而 $C_1 = 1.232 \text{ }\mu\text{F}$ 、 $C_2 = 1.84 \text{ }\mu\text{F}$ 、 $C_3 = 1.1 \text{ }\mu\text{F}$ 的值均乘以 C_0 。数值仿真可得此状态下各点的电压,如图 11 所示。

图10 误差为 2 dB、 $q=0.9$ 时的等效电路

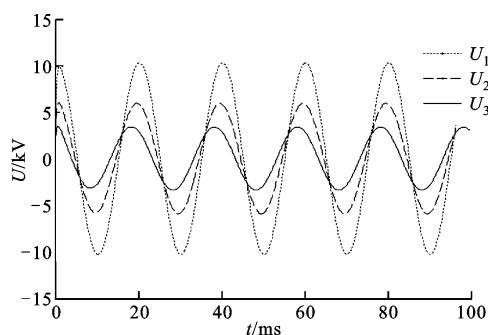


图11 误差为2 dB、 $q=0.9$ 时电路各点电位

仿真结果表明:当分数阶电容的阶次 q 一定时,波特图的最大误差为2 dB时的分数阶电容内部各点的电位值的比最大误差为3 dB时的均匀;当波特图的最大误差一定(例如2 dB),随着 q 值的增加,分数阶电容内部的电场分布趋于均匀;由于电容的存在,各点电压的相位有所变化,相位值在同一时间点逐渐增大,并展现出良好的空间关联特性。

4 结 论

本文基于分数阶微积分算子理论,构造了含并联电力电容器的分数阶等效电路结构模型,采用预估校正算法对分数阶系统进行了频域转换,提出了无限维链型分抗电路拟合电容构造系统分维特性的方法。数值分析结果验证了等效电路中分数阶电力电容器电场分布将随阶次的增加趋于均匀的结论,该结论可进一步应用于电力电容器绝缘优化的设计以及电容器动力学特性分析问题中。

参考文献:

- [1] 潘志文,崔桂梅. 电力电容器的电容值测量及失效分析[J]. 物理测试, 2011, 29(6): 59-62.
PAN Zhiwen, CUI Guimei. Measurement of capacitor value and failure analysis of power capacitors [J]. Physics Examination and Testing, 2011, 29(6): 59-62.
- [2] 韩长伟,李晓军,马丽荣,等. 电力电容器元件内部的电场计算[J]. 电力电容器与无功补偿, 2009, 30(6): 22-30.
HAN Changwei, LI Xiaojun, MA Lirong, et al. Internal electric field calculation of power capacitor element [J]. Power Capacitor & Reactive Power Compensation, 2009, 30(6): 22-30.
- [3] 郭天兴,吴俊丽,张建平. 有限元法在标准电容器电场计算中的应用[J]. 电力电容器, 2004(1): 3-8.
GUO Tianxing, WU Junli, ZHANG Jianping. The application of finite element methods to electric field

calculation in the standard capacitor [J]. Power Capacitor, 2004(1): 3-8.

- [4] 徐文彬,庄铭杰,王德苗. 基于叉指结构的平面分形电容研究[J]. 集美大学学报: 自然科学版, 2010, 15(5): 389-393.
XU Wenbin, ZHUANG Mingjie, WANG Demiao. Fractal planar capacitors based on interdigital structures [J]. Journal of Jimei University: Natural Science, 2010, 15(5): 389-393.
- [5] 刘崇新. 一个超混沌系统及其分数阶电路仿真实验[J]. 物理学报, 2007, 56(12): 6865-6874.
LIU Chongxin. A hyperchaotic system and its fractional order circuit simulation [J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(12): 6865-6874.
- [6] LIU Chongxin, LU Junjie. A novel fractional-order hyperchaotic system and its circuit realization [J]. International Journal of Modern Physics: B, 2010, 24(10): 1299-1307.
- [7] YU Simin, LU Jinhu, CHEN Guanrong, et al. Generating grid multiwing chaotic attractors by constructing heteroclinic loops into switching systems [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems: II Express Briefs, 2011, 58(5): 314-318.
- [8] LIU Ling, LIU Chongxin, ZHANG Yanbin. Experimental verification of a four-dimensional Chua's system and its fractional order chaotic attractors [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2009, 19(8): 2473-2486.
- [9] LIU Ling, LIU Chongxin, ZHANG Yanbin. Experimental confirmation of a modified Lorenz system [J]. Chinese Physics Letter, 2007, 24(10): 2756-2758.
- [10] SAMAVATI H, HAJIMIRI A, SHAHANI A R, et al. Fractal capacitors [J]. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 1998, 33(12): 2035-2041.
- [11] WESTERLUND S. Capacitor theory [J]. IEEE Trans Dielectrics Electron Insulation, 1994, 1(5): 826-829.
- [12] JESUS S I, MACHADO T J. Development of fractional order capacitors based on electrolyte processes [J]. Nonlinear Dynamics, 2009, 56(2): 45-55.
- [13] CHAREF A, SUN H H, TSAO Y Y, et al. Fractal system as represented by singularity function [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(9): 1465-1470.
- [14] AHMAD W M, SPROTT J C. Chaos in fractional-order autonomous nonlinear system [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, 16: 339-351.

(编辑 杜秀杰)